OPCIÓN A

A.1.- Sea A la matriz: $A = \begin{pmatrix} 5 & -m & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$

a) *(1,5 puntos)* Discuta el sistema que aparece a continuación, para cada uno de los valores de ***m*** y resuélvalo para los valores de ***m*** siguientes: **m =−1** y **m = 2**.

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad donde \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

b)*(1 punto)* Determine la inversa de la matriz **A** cuando **m = 0**.

a) El sistema de ecuaciones homogéneas que se nos pide discutamos puede ser Compatible Determinado, su solución será la trivial, siempre que el determinante de la matriz de los coeficientes no sea nulo, en el caso contrario el sistema es Compatible Indeterminado y tiene infinitas soluciones.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -m & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -m-5 & 3-5m \\ 0 & -2 & -m \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -m-5 & 3-5m \\ -2 & -m \end{vmatrix} = m^2 + 5m + 6 - 10m = m^2 - 5m + 6 \Rightarrow$$

$$Si\ |A| = 0 \Rightarrow m^2 - 5m + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 \geq 0 \Rightarrow m = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{5+1}{2} = 3 \\ m = \dfrac{5-1}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall m \in \Re - \{2\ ,\ 3\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$$

$$Solución\ trivial \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (0\ ,\ 0\ ,\ 0)$$

$$Si\ m = 2\ o\ m = 3 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rang\ (A) = rang\ (A/B) \leq 2 < Número\ de\ incognitas \Rightarrow$$

$$Sistema\ Compatible\ Indeterminado \Rightarrow Infinitas\ soluciones$$

$$Si\ m = -1 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -4z = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow -2y - 0 = 0 \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow$$

$$y = 0 \Rightarrow x + 0 + 0 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow Solución\ trivial \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (0\ ,\ 0\ ,\ 0)$$

$$Si\ m = 2 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -7 & -7 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow y + z = 0 \Rightarrow y = -z \Rightarrow$$

$$x - z + 2z = 0 \Rightarrow x + z = 0 \Rightarrow x = -z \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (-\lambda\ ,\ -\lambda\ ,\ \lambda)$$

Continuación del Problema A.1

b) Una matriz tiene inversa siempre que su determinante no sea nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (1+1) = 6 \neq 0 \Rightarrow Existe\ A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\ A^t \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$adj\ A^t = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & -5 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & -5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{6} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

A.2.- a) *(1 punto)* ¿Pueden existir vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$? **Justifique la respuesta.**

b) *(1,5 puntos)* Determine todos los posibles vectores $\vec{u} = (a\ ,\ 0\ ,\ b)$ que tengan módulo **8** y sean perpendiculares a la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$

$a)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) \Rightarrow \cos(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{8}{2 \cdot 3} = \frac{4}{3} > 1 \Rightarrow (\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = arc \cos\left(\frac{4}{3}\right) \Rightarrow No\ tiene\ solución$$

b) Al ser los vectores directores perpendiculares, su producto escalar es nulo.

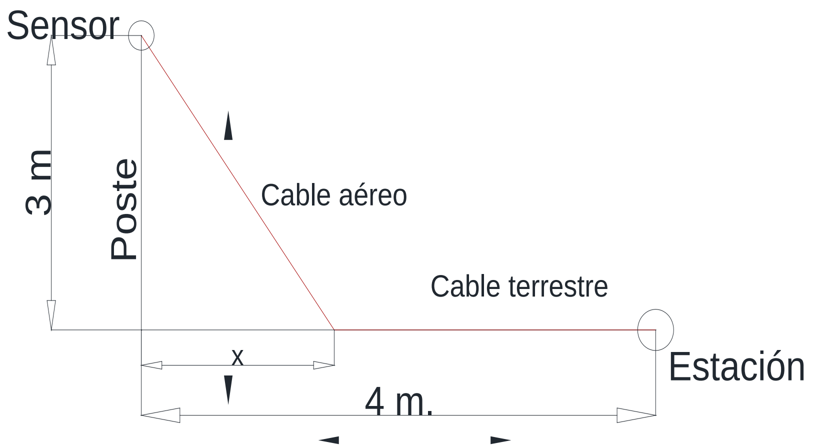
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + 2z - 2 = 0 \Rightarrow x + z - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 - z \Rightarrow 1 - z + y + z = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (-1\ ,\ 0\ ,\ 1) \\ \vec{u} = (a\ ,\ 0\ ,\ b) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (-1\ ,\ 0\ ,\ 1) \cdot (a\ ,\ 0\ ,\ b) = 0 \Rightarrow -a + b = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = b \\ 8 = \sqrt{a^2 + 0^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{b^2 + b^2} = 8 \Rightarrow \sqrt{2} b = 8 \Rightarrow b = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$$

$$Sera\ solución\ \vec{u} = (4\sqrt{2}\ ,\ 0\ ,\ 4\sqrt{2})\ y\ su\ opuesto\ -\vec{u} = (-4\sqrt{2}\ ,\ 0\ ,\ -4\sqrt{2})$$

A.3.- *(2,5 puntos)* Un poste de 3 metros de altura tiene en su punta un sensor que recoge datos meteorológicos. Dichos datos deben transmitirse a través de un cable a una estación de almacenamiento situada a 4 metros de la base del poste. El cable puede ser aéreo o terrestre, según vaya por el aire o por el suelo (véase figura).
El coste del cable es distinto según sea aéreo o terrestre. El metro de cable aéreo cuesta 3000 euros y el metro de cable terrestre cuesta 1000 euros. ¿Qué parte del cable debe ser aéreo y qué parte terrestre para que su coste sea mínimo?



Siendo A la longitud del cable aéreo y T la del cable terrestre

$$\begin{cases} A^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow A = \sqrt{9+x^2} \\ T = 4 - x \\ P = 3000 \cdot A + 1000 \cdot T \end{cases} \Rightarrow P = 3000 \cdot \sqrt{9+x^2} + 1000 \cdot (4-x) = 1000 \cdot \left(3\sqrt{9+x^2} + 4 - x\right) \Rightarrow$$

$$P' = \frac{dP}{dx} = 1000 \cdot \left(3 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{9+x^2}} - 1\right) = 1000 \cdot \frac{3x - \sqrt{9+x^2}}{\sqrt{9+x^2}} \Rightarrow Si\ P' = 0 \Rightarrow 3x - \sqrt{9+x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$3x = \sqrt{9+x^2} \Rightarrow 9x^2 = 9 + x^2 \Rightarrow 8x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{8} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$P'' = \frac{d^2P}{dx^2} = 1000 \cdot \frac{\left(3 - \frac{2x}{2\sqrt{9+x^2}}\right)\sqrt{9+x^2} - \frac{2x}{2\sqrt{9+x^2}}\left(3x - \sqrt{9+x^2}\right)}{9+x^2} = 1000 \cdot \frac{3\sqrt{9+x^2} - x - \frac{3x^2}{\sqrt{9+x^2}} + x}{9+x^2}$$

$$P'' = 1000 \cdot \frac{3\left(9+x^2\right) - 3x^2}{\left(9+x^2\right)\sqrt{9+x^2}} = 1000 \cdot \frac{27 + 3x^2 - 3x^2}{\left(9+x^2\right)\sqrt{9+x^2}} = \frac{27000}{\left(9+x^2\right)\sqrt{9+x^2}}$$

$$P''\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{27000}{\left[9 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2\right]\sqrt{9 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2}} = \frac{27000}{\left(9 + \frac{18}{16}\right)\sqrt{9 + \frac{18}{16}}} = \frac{27000}{\left(9 + \frac{9}{8}\right)\sqrt{9 + \frac{9}{8}}} = \frac{27000}{\frac{81}{8}\sqrt{\frac{81}{8}}} = \frac{27000}{\frac{81}{8}\sqrt{\frac{81}{8}}}$$

$$P''\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{27000 \cdot 8}{81 \cdot \frac{9}{2\sqrt{2}}} = \frac{3000 \cdot 8 \cdot 2\sqrt{2}}{81} = \frac{1000 \cdot 8 \cdot 2\sqrt{2}}{27} > 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow \begin{cases} T = 4 - \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{16 - 3\sqrt{2}}{4}\ m \\ A = \sqrt{9 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{9}{2\sqrt{2}}\ m \end{cases}$$

A.4.- a) *(1,25 puntos)* Determine la función **f(x)** cuya derivada es $f'(x) = 2x\, e^{5x}$ y que verifica que **f(0)** = **2**.

b) *(1,25 puntos)* Calcule: $\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}}$

$a)$

$$f(x) = 2\int x\, e^{5x}dx = 2\cdot\left(\frac{xe^{5x}}{5} - \int \frac{e^{5x}}{5}\,dx\right) = \frac{2}{5}\cdot\left(xe^{5x} - \int e^{5x}\,dx\right) = \frac{2}{5}\cdot\left(xe^{5x} - \frac{e^{5x}}{5}\right) = \frac{2e^{5x}}{25}\cdot(5x-1) + K$$

$$\begin{cases} x = u \Rightarrow dx = du \\ e^{5x}dx = dv \Rightarrow x = \int e^{5x}dx = \int e^t\,\frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int e^t dt = \frac{e^t}{5} = \frac{e^{5x}}{5} \\ 5x = t \Rightarrow 5\,dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{5} \end{cases}$$

$$f(0) = 2 \Rightarrow \frac{2e^{5\cdot 0}}{25}\cdot(5\cdot 0 - 1) + K = 2 \Rightarrow \frac{2e^0}{25}(-1) + K = 2 \Rightarrow -\frac{2\cdot 1}{25} + K = 2 \Rightarrow K = 2 + \frac{2}{25} = \frac{52}{25} \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{2e^{5x}}{25}\cdot(5x-1) + \frac{48}{25}$$

$b)$

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}} = \left(\frac{1}{3-2^+}\right)^{\frac{1}{(2-2^+)^2}} = 1^{\frac{1}{0^+}} = 1^\infty \Rightarrow$$

$$Siendo\ A = \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}} \Rightarrow \ln A = \lim_{x\to 2^+}\ln\left(\frac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}} = \lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(2-x)^2}\cdot\ln\left(\frac{1}{3-x}\right) = \lim_{x\to 2^+}\frac{\ln\left(\frac{1}{3-x}\right)}{(2-x)^2} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{\ln\left(\frac{1}{3-x}\right)}{(2-x)^2} = \frac{\ln\left(\frac{1}{3-2}\right)}{(2-2)^2} = \frac{\ln 1}{0^2} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to 2^+}\frac{\frac{1}{\frac{1}{3-x}}\cdot\frac{-(-1)}{(3-x)^2}}{2\cdot(-1)\cdot(2-x)} = \lim_{x\to 2^+}\frac{\frac{1}{3-x}}{-2\cdot(2-x)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3-2}}{2\cdot(2-2)} = \frac{1}{2\cdot 0} = \frac{1}{0} = \infty$$

OPCIÓN B

B1.- a) *(1 punto)* Determine el rango de la matriz **A**, que aparece a continuación, según los diferentes valores de **a**: $A=\begin{pmatrix} a & -a & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ a+2 & -5 & -10 \end{pmatrix}$

b) *(1,5 puntos)* Determine, si existe, una matriz **A**, 2 x 2, que verifique la siguiente ecuación matricial:

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ ¿Cuál es el rango de la matriz **A**?

a) El rango de la matriz es 3 cuando su determinante no sea nulo

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -a & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ a+2 & -5 & -10 \end{vmatrix} = 20a-4a\,(a+2)-60+12\,(a+2)+20a-20a = 20a-4a^2-8a-60+12a+24$$

$$|A| = -4a^2+24a-36 = -4\cdot\left(a^2-6a+9\right) \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow -4\cdot\left(a^2-6a+9\right)=0 \Rightarrow a^2-6a+9=0 \Rightarrow$$

$$\Delta = (-6)^2-4\cdot1\cdot9=0 \Rightarrow a=\frac{6}{2\cdot1}=3$$

$$\forall a\in\Re-\{3\} \Rightarrow |A|\neq0 \Rightarrow rang\ (A)=3$$

$$Si\ a=3$$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ 5 & -5 & -10 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow rang\ (A)=2$$

$b)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow$$

$$IAI = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 9 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A=\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 9 & 9 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang\ (A)=2$$

B.2.- Dadas las rectas: $r: \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$ y $s: \begin{cases} x=-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{cases}$

a) *(1,5 puntos)* Determine su posición relativa.
b) *(1 punto)* Calcule la distancia del punto **A = (2 , 3 , 1)** a la recta **s**.

a) Analizaremos si las rectas tienen un punto común, si el sistema que resulta es compatible determinado son secantes, si es compatible indeterminado las rectas coinciden.
Si el sistema es incompatible y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no serlo las rectas se cruzan en el espacio.

$$\begin{cases} r: \begin{cases} x=2\mu \\ y=3\mu \\ z=\mu \end{cases} \\ s: \begin{cases} x=-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\mu=-\lambda \\ 3\mu=1+2\lambda \\ \mu=-2+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\mu+\lambda=0 \\ 3\mu-2\lambda=1 \\ \mu-2\lambda=-2 \end{cases} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-4-3=-7\neq 0 \Rightarrow rang\ (A)=2$$

$$|A/B|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}=8+1+4+6=19\neq 0 \Rightarrow rang\ (A/B)=3 \Rightarrow$$

$$rang\ (A)=2\neq rang\ (A/B)=3 \Rightarrow Sistema\ Incompatible \Rightarrow No\ son\ coincidentes\ ni\ secantes$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(2\ ,3\ ,1) \\ \overrightarrow{v_s}=(-1\ ,2\ ,2) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{-1}\neq\frac{3}{2} \Rightarrow No\ son\ proporcionales \Rightarrow No\ son\ paralelas$$

Son dos rectas que se cruzan en el espacio

b) Hallaremos un plano π que conteniendo al punto **A** sea perpendicular a la recta s, por lo tanto el vector director del plano es el de la recta que es perpendicular al vector **AG**, siendo **G** el punto genérico del plano que buscamos, y su producto escalar es nulo y la ecuación que queremos.
La distancia pedida es la que hay entre el punto **A** y el punto **B** intersección de la recta y el plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi}=\overrightarrow{v_s}=(-1\ ,2\ ,2) \\ \overrightarrow{AG}=(x\ ,y\ ,z)-(2\ ,3\ ,1)=(x-2\ ,y-3\ ,z-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\perp\overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{AG}=0 \Rightarrow$$

$$(-1\ ,2\ ,2)\cdot(x-2\ ,y-3\ ,z-1)=0 \Rightarrow -(x-2)+2\ (y-3)+2\ (z-1)=0 \Rightarrow \pi\equiv x-2y-2z+6=0$$

$$Punto\ B\ intersección\ de\ \pi\ y\ s$$

$$s: \begin{cases} x=-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{cases} \Rightarrow -\lambda-2\ (1+2\lambda)-2\ (-2+2\lambda)+6=0 \Rightarrow -\lambda-2-4\lambda+4-4\lambda+6=0 \Rightarrow -9\lambda+8=0 \Rightarrow$$

$$9\lambda=8 \Rightarrow \lambda=\frac{8}{9} \Rightarrow B\left(-\frac{8}{9}\ ,1+\frac{8}{9}\ ,-2+2\cdot\frac{8}{9}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(-\frac{8}{9}\ ,\frac{17}{9}\ ,-\frac{2}{9}\right)-(2\ ,3\ ,1)=\left(-\frac{26}{9}\ ,-\frac{10}{9}\ ,-\frac{11}{9}\right)$$

$$d(A\ ,s)=d(A\ ,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(-\frac{26}{9}\right)^2+\left(-\frac{10}{9}\right)^2+\left(-\frac{11}{9}\right)^2}=\sqrt{\frac{676+100+121}{81}}=\frac{\sqrt{897}}{9}u$$

B.3.- a) *(1,25 puntos)* Sea la función $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$. Determine el dominio y las asíntotas de **f(x)**, si existen.
b) *(1,25 puntos)* Determine el área del recinto encerrado por las funciones: **f(x) = x^2 – 3** y **g(x) = 1**

$a)$

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow f(-1)=\frac{(-1)^3}{(-1)^2-1}=\frac{-1}{1-1}=\frac{-1}{0} \Rightarrow Sin\ solución \\ x=1 \Rightarrow f(1)=\frac{1^3}{1^2-1}=\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0} \Rightarrow Sin\ solución \end{cases}$$

$$Dom(f)=\forall x \in \Re-\{-1,1\}$$

$$Asíntotas\ verticales \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to -1^-} f(x)=\frac{(-1)^3}{(-1^-)^2-1}=\frac{-1}{0^+}=-\infty \\ \lim_{x\to -1^+} f(x)=\frac{(-1)^3}{(-1^+)^2-1}=\frac{-1}{0^-}=\infty \end{cases} \\ x=1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x)=\frac{1^3}{(1^-)^2-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\frac{1^3}{(1^+)^2-1}=\frac{1}{0^+}=\infty \end{cases} \end{cases}$$

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}-\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{0-0}=\frac{1}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow$$

No existe asíntota horizontal cuando $x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3}{x^2-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}-\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{0} \Rightarrow Sin\ soluc.$$

No existe asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{1-0}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1}=0$$

Existe asíntota oblicua, $y=x$, *cuando* $x\to\infty$

Continuación del Problema B.3

a)Continuación

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-x)^3}{(-x)^3-(-x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3}{-x^3+x}=\frac{-\infty}{-\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{x^3}{x^3}}{-\frac{x^3}{x^3}+\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{-1+\frac{1}{x^2}}=\frac{-1}{-1+\frac{1}{\infty}}=\frac{-1}{-1+0}=1$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-x)}{(-x)^2-1}\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2-1}=\frac{-\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1}=0$$

Existe asíntota oblicua, $y=x$, *cuando* $x\to-\infty$

b)

Puntos de corte entre funciones $\Rightarrow x^2-3=1\Rightarrow x^2-4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm\sqrt{4}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\x=2\end{cases}\Rightarrow$

$f'(-x)=(-x)^2-3=x^2-3=f(x)\Rightarrow$ *Fúnción simétrica*

Puntos de corte con OX $\Rightarrow y=0\Rightarrow x^2-3=0\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}\Rightarrow\begin{cases}x=-\sqrt{3}\\x=\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow$

$$A=2\cdot\left|\int_0^{\sqrt{3}}\left(x^2-3\right)dx\right|+2\int_0^{\sqrt{3}}1\cdot dx+2\int_{\sqrt{3}}^{2}1\cdot dx-2\cdot\int_{\sqrt{3}}^{2}\left(x^2-3\right)dx=2\int_0^2 dx-2\cdot\int_0^{\sqrt{3}}\left(x^2-3\right)dx-2\cdot\int_{\sqrt{3}}^{2}\left(x^2-3\right)dx$$

$$A=2\int_0^2 dx-2\cdot\int_0^2\left(x^2-3\right)dx=2\cdot\int_0^2\left(1-x^2+3\right)dx=2\cdot\int_0^2\left(-x^2+4\right)dx=-2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^2+8\cdot[x]_0^2$$

$$A=-\frac{2}{3}\cdot\left(2^3-0^3\right)+8\cdot(2-0)=-\frac{16}{3}+16=\frac{32}{3}u^2$$

B.4.- a) *(1 punto)* Determine qué valor debe tomar **k** para que $\lim_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+kx-5}\right)=1$

b) *(1,5 puntos)* Calcule: $\int 2x\left[\ln(x)\right]^2 dx$

a)

$$\lim_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+kx-5}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2x-\sqrt{4x^2+kx-5}\right)\cdot\left(2x+\sqrt{4x^2+kx-5}\right)}{\left(2x+\sqrt{4x^2+kx-5}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-\left(4x^2+kx-5\right)}{2x+\sqrt{4x^2+kx-5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-4x^2-kx+5}{2x+\sqrt{4x^2+kx-5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-kx+5}{2x+\sqrt{4x^2+kx-5}}=\frac{-\infty}{\infty}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-k\frac{x}{x}+\frac{5}{x}}{2\frac{x}{x}+\sqrt{4\frac{x^2}{x^2}+k\frac{x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-k+\frac{5}{x}}{2+\sqrt{4+\frac{k}{x}-\frac{5}{x^2}}}=\frac{-k+\frac{5}{\infty}}{2+\sqrt{4+\frac{k}{\infty}-\frac{5}{\infty}}}=\frac{-k+0}{2+\sqrt{4+0-0}}=-\frac{k}{4}\Rightarrow$$

$$-\frac{k}{4}=1\Rightarrow k=-\frac{1}{4}$$

Continuación del problema B.4

c)

$$I = 2\int x\,[\ln(x)]^2 dx = 2\cdot\left(\frac{x^2}{2}\cdot[\ln(x)]^2\right) - 2\int \frac{1}{2}\cdot x^2\cdot 2\cdot \ln(x)\cdot\frac{1}{x}dx = 2\cdot\left(\frac{x^2}{2}\cdot[\ln(x)]^2\right) - 2\int x\ \ln(x)\,dx$$

$$\begin{cases} [\ln(x)]^2 = u \Rightarrow 2\cdot\ln(x)\cdot\dfrac{1}{x}dx = du \\ x\,dx = dv \Rightarrow v = \displaystyle\int x\,dx = \frac{1}{2}\cdot x^2 \end{cases}$$

$$I = x^2[\ln(x)]^2 - 2\int x\ \ln(x)\,dx = x^2[\ln(x)]^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2\ln(x) + 2\int\frac{1}{2}x^2\ \frac{dx}{x} = x^2[\ln(x)]^2 - x^2\ln(x) + \int x\,dx$$

$$\begin{cases} \ln(x) = u \Rightarrow \dfrac{1}{x}dx = du \\ x\,dx = dv \Rightarrow v = \displaystyle\int x\,dx = \frac{1}{2}\cdot x^2 \end{cases}$$

$$I = x^2\left\{[\ln(x)]^2 - \ln(x)\right\} + \frac{1}{2}\cdot x^2 = x^2\left\{[\ln(x)]^2 - \ln(x) + \frac{1}{2}\right\} + K$$